
УМОВИ САМООРГАНІЗОВАНОЇ МОДУЛЯЦІЇ

О.І. ОЛЄМСКОЙ, І.О. ШУДА¹, С.С. БОРИСОВ¹

УДК 539.2
© 2008 р.

Інститут прикладної фізики НАН України
(Вул. Петропавлівська, 58, Суми 40030; e-mail: alex@ufn.ru),

¹Сумський державний університет
(Вул. Римського-Корсакова, 2, Суми 40007)

Досліджено умови народження граничного циклу, які забезпечують перехід нерівноважної системи у режим самоорганізованої модуляції. Викладено схему, використання якої дозволяє представити рівняння самоузгодженої еволюції пари дійсних змінних одним рівнянням руху комплексного параметра порядку. Знайдено оптимальний базис, у якому його еволюція описується рівнянням Гінзбурга–Ландау, що має тільки комплексну нелінійність. Визначено умови переходу у режим самоорганізованої модуляції.

1. Вступ

Синергетика представляє міждисциплінарний напрямок, використання якого дозволяє описати самоорганізацію відкритих систем у фізиці, хімії, біології, соціології, других науках і їх застосуваннях [1–4]. Як правило, такі системи досліджуються у рамках нерівноважної кінетики, основою якої є другий початок термодинаміки, який постулює незмінність або зростання ентропії за часом. Однак подібна поведінка притаманна закритим статистичним ансамблям, тоді як синергетика досліджує відкриті системи, значне віддалення яких від рівноваги може зменшувати ентропію, яка є мірою статистичного безладу (хаосу). У результаті самоорганізації виникає впорядкований стан, що відповідає мінімуму ефективного потенціалу, в якому система може знаходитись настільки довго, наскільки зазнає заданого впливу зовнішнього середовища.

На відміну від термодинамічних перетворень процес самоорганізації може приводити не тільки до фор-

мування статистичних станів, яким відповідає незмінний за часом локальний мінімум ефективного потенціалу, але і до утворення часових, просторових або просторово-часових дисипативних структур, еволюція яких визначається набагато складнішою притягуючою множиною, ніж точка.

Часто утворення такого роду структур відбувається за сценарієм біфуркації Хопфа, у результаті якої утворюється стійкий граничний цикл [5]. Оскільки при цьому еволюція системи зводиться до періодичної зміни величин, які параметризують її поведінку, то можна говорити, що народження граничного циклу означає перехід системи у режим *самоорганізованої модуляції*.

Такий режим досліджували у рамках найпростішої схеми, яка дозволяє представити з єдиної точки зору як фазові переходи, так і утворення дисипативних структур [6]. Ця схема ґрунтується на синергетичній моделі Лоренца–Хакена, у рамках якої самоузгоджена поведінка системи представляється еволюцією параметра порядку, спряженого поля і управляючого параметра [7]. На відміну від звичайних синергетичних систем прояв самоорганізованої модуляції передбачає, що найбільший масштаб зміни часу має не одна, а пара степенів свободи. Якщо до них відноситься параметр порядку, швидкість зміни якого лінійно залежить від інших параметрів, то народження граничного циклу виявляється неможливим, і поведінка системи не відрізняється від термодинамічного перетворення [8].

У зв'язку із сказаним постає актуальним дослідження умов народження граничного циклу, що забезпечують перехід у режим самоорганізованої модуляції. Розгляду таких умов присвячена монографія [5], однак в силу зайвої формалізації вона досить складна для сприйняття. Крім того, виявляється, що знайдений у роботі [5] критерій народження граничного циклу є настільки громіздким, що його використання практично неможливе навіть для найпростіших систем. Тому ми проводимо послідовний розгляд умов переходу у режим самоорганізованої модуляції, закінчуючи розгляд чисельним розв'язком рівнянь руху, який підтверджує достовірність знайденого критерію.

Роботу побудовано таким чином. У розділі 2 викладено схему, використання якої дозволяє представити рівняння самоузгодженої еволюції пари дійсних змінних одним рівнянням руху комплексної змінної, в якому виділено лінійний доданок (в математичній літературі таке рівняння відносять до канонічної форми Пуанкаре). Розділ 3 присвячено вибору оптимального базису комплексного параметра порядку, в якому його еволюція описується стандартним рівнянням Гінзбурга–Ландау, що має тільки кубічну нелінійність. У розділі 4 знайдено умови утворення граничного циклу, які досліджуються у розділі 5 для системи Лоренца, що відчуває переривчасте перетворення.

2. Комплексне зображення рівнянь руху

Згідно з теоремою про центральну багатостатність [5], еволюція системи, що має $n > 2$ степенів свободи, може бути зображена періодичними залежностями пари дійсних змінних $X_1(t)$, $X_2(t)$. Тому задача зводиться до визначення умов, за яких рівняння руху цих змінних

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F^{(1)}, & F^{(1)} &= F^{(1)}(X_1, X_2); \\ \dot{X}_2 &= F^{(2)}, & F^{(2)} &= F^{(2)}(X_1, X_2) \end{aligned} \quad (1)$$

приводять до розв'язку, що відповідає граничному циклу (тут і далі крапка над символами означає диференціювання за часом, праві частини рівнянь (1) відображають узагальнені сили, спряжені відповідним степеням свободи). Найпростіший приклад граничного циклу дає система лінійних рівнянь Лоткі–Вольтера:

$$\dot{X}_1 = \lambda X_1 - \omega X_2,$$

$$\dot{X}_2 = \omega X_1 + \lambda X_2, \quad (2)$$

визначена дійсними параметрами λ , ω . Дійсно, ділення одного з цих рівнянь на друге з подальшим інтегруванням за умови $\lambda = 0$ приводить до рівняння кола $X_1^2 + X_2^2 = \text{const}$ із сталою, що визначає його радіус. Звідси видно, що у загальному випадку рівняння (1) дають граничний цикл, якщо їх лінійна складова зводиться до системи (2). Це означає, що у стаціонарному стані $X_1 = X_{10}$, $X_2 = X_{20}$, де зникає залежність від часу, матриця Якобі

$$\Lambda_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial X_\beta} \right|_{X_\beta = X_{\beta 0}}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (3)$$

набуває канонічної форми

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix}, \quad (4)$$

яка незважаючи на простоту має самий загальний вигляд. Дійсно, на діагональні компоненти матриці (4) накладається умова, щоб вони одночасно дорівнювали нулю в критичній точці яка відповідає народженню граничного циклу. Тому вони можуть розрізнятися тільки чисельним коефіцієнтом, від якого легко позбавитись за рахунок вибору одиниць виміру. Що стосується недиагональних компонент, то збіг їх абсолютних величин є наслідком умови Онзагера на симетрію кінетичних коефіцієнтів у рівняннях (2), а вибір протилежних знаків забезпечує самоорганізацію системи.

Рівняння (1) зручно подати у векторній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}, \quad (5)$$

використовуючи позначення

$$\mathbf{X} \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

У рамках такого подання визначну роль відіграють власні значення Λ , $\bar{\Lambda}$ і вектори e_α , e_α^+ матриці Якобі (3), які задаються спряженими рівняннями

$$\sum_{\beta=1}^2 \Lambda_{\alpha\beta} e_\beta = \Lambda e_\alpha, \quad \sum_{\beta=1}^2 e_\beta^+ \Lambda_{\beta\alpha} = \bar{\Lambda} e_\alpha^+. \quad (7)$$

Тут показник Ляпунова

$$\Lambda \equiv \lambda + i\omega \quad (8)$$

визначається інкрементом λ і частотою ω . У канонічному випадку (4) власне значення (8) відповідає векторам

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ i), \quad (9)$$

які задовольняють умовам нормування

$$\mathbf{e}^+ \mathbf{e} \equiv (\mathbf{e}|\mathbf{e}) \equiv \sum_{\alpha=1}^2 e_{\alpha}^+ e_{\alpha} = 1. \quad (10)$$

Для придання канонічного вигляду рівнянням (5) введемо псевдовектор

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \quad (11)$$

відрахований від стаціонарного стану \mathbf{X}_0 , і нелінійну складову сили

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{F} - \hat{\Lambda} \mathbf{x}. \quad (12)$$

У результаті (5) зводиться до вигляду

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\Lambda} \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (13)$$

Визначимо комплексно-спряжені змінні

$$z \equiv (\mathbf{e}|x) = \sum_{\alpha=1}^2 x_{\alpha} e_{\alpha}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + ix_2),$$

$$\bar{z} \equiv (x|\mathbf{e}) = \sum_{\alpha=1}^2 \bar{x}_{\alpha} e_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x}_1 - i\bar{x}_2), \quad (14)$$

які є проєкцією вектора стану (11) на власні вектори (9) матриці (4). Вони отримані дією оператора проєктування

$$\hat{P} \equiv |\mathbf{e}\rangle \langle \mathbf{e}| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

на початковий псевдовектор (11), записаний у компонентній формі (6):

$$\hat{P} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + ix_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \equiv z \mathbf{e}. \quad (16)$$

Помноживши це рівняння на \mathbf{e}^+ , отримаємо матричний вираз означень (14):

$$z = \mathbf{e}^+ \hat{P} \mathbf{x} \equiv (\mathbf{e}|\hat{P}|x),$$

¹Ми не зупиняємось на причинах вибору верхніх меж підсумовування в (22), (30), вважаючи їх інтуїтивно зрозумілими. Математичне пояснення такого вибору можна знайти в роботі [5].

$$\bar{z} = \mathbf{x}^+ \hat{P} \mathbf{e} \equiv (x|\hat{P}|\mathbf{e}), \quad (17)$$

останнє з яких є результатом комплексного спряження першого з урахуванням ермітовості оператора \hat{P} . Використовуючи вирази (15), (9), (4), легко переконатись в основних властивостях оператора проєктування:

$$\hat{P}^2 = \hat{P}; \quad \hat{P} \mathbf{e} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}^+ \hat{P} = \mathbf{e}^+; \quad \hat{P} \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} \hat{P}. \quad (18)$$

З урахуванням останньої дії оператора (15) на рівняння (13) з послідовним множенням на $(\mathbf{e}|\equiv \mathbf{e}^+$ і додаванням за компонентами отримуємо канонічну форму Пуанкаре:

$$\dot{z} = \Lambda z + v(z, \bar{z}), \quad v(z, \bar{z}) \equiv (\mathbf{e}|\hat{P}|f) = \mathbf{e}^+ \hat{P} \mathbf{f}, \quad (19)$$

в якій виділено лінійну складову узагальненої сили.

3. Подання рівнянь руху у формі Гінзбурга–Ландау

Легко переконатись, що перехід від компонентного подання

$$\dot{x}_1 = F^{(1)}(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = F^{(2)}(x_1, x_2) \quad (20)$$

до канонічного рівняння руху для комплексної змінної $z \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + ix_2)$, визначеної рівняннями (14), (17), досягається поданням правої частини (19) комплексною силою

$$F = F(z, \bar{z}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F^{(1)}(x_1(z, \bar{z}), x_2(z, \bar{z})) + iF^{(2)}(x_1(z, \bar{z}), x_2(z, \bar{z})) \right]. \quad (21)$$

Її нелінійна складова $v \equiv F - \Lambda z$ подається рядом¹

$$v(z, \bar{z}) = \sum_{2 \leq m+n \leq 3} \frac{v_{mn}}{m!n!} z^m \bar{z}^n + O(|z|^4), \quad |z|^2 \equiv z\bar{z} \quad (22)$$

з коефіцієнтами

$$v_{mn} \equiv \frac{\partial^{m+n} v(z, \bar{z})}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \Big|_{z, \bar{z}=0} = \frac{\partial^{m+n} F(z, \bar{z})}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \Big|_{z, \bar{z}=0}. \quad (23)$$

Врахування рівності (21) і зв'язків між похідними

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \quad (24)$$

приводить вираз (23) до вигляду

$$v_{mn} = 2^{-\frac{1+m+n}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^n \times$$

$$\times \left[F^{(1)}(x_1, x_2) + i F^{(2)}(x_1, x_2) \right]_{x_1, x_2=0}. \quad (25)$$

Звідси для різних m, n отримуємо

$$v_{11} = 2^{-3/2} \left[\left(F_{11}^{(1)} + F_{22}^{(1)} \right) + i \left(F_{11}^{(2)} + F_{22}^{(2)} \right) \right], \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} v_{20} \\ v_{02} \end{pmatrix} = 2^{-3/2} \left[\left(F_{11}^{(1)} - F_{22}^{(1)} \pm 2F_{12}^{(2)} \right) + \right.$$

$$\left. + i \left(F_{11}^{(2)} - F_{22}^{(2)} \mp 2F_{12}^{(1)} \right) \right], \quad (27)$$

$$v_{21} = \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(F_{111}^{(1)} + F_{122}^{(1)} \right) + \left(F_{112}^{(2)} + F_{222}^{(2)} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + i \left[\left(F_{111}^{(2)} + F_{122}^{(2)} \right) - \left(F_{112}^{(1)} + F_{222}^{(1)} \right) \right] \right\}, \quad (28)$$

де позначено

$$F_{\alpha\beta}^{(\delta)} \equiv \frac{\partial^2 F^{(\delta)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{\mathbf{x}=0}, \quad F_{\alpha\beta\gamma}^{(\delta)} \equiv \frac{\partial^3 F^{(\delta)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \Big|_{\mathbf{x}=0};$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2. \quad (29)$$

Перейдемо до комплексного параметра порядку ϕ , зв'язок якого із змінною z задається рівняннями

$$z = \phi + \chi(\phi, \bar{\phi}), \quad \chi \equiv \sum_{2 \leq m+n \leq 4} \frac{\chi_{mn}}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n. \quad (30)$$

Коефіцієнти χ_{mn} визначаються таким чином, щоб рівняння (19) набуло вигляду Гінзбурга–Ландау (в математичній термінології – нормальну форму Пуанкаре, яка не містить квадратичних доданків):

$$\dot{\phi} = \Lambda \phi + C |\phi|^2 \phi + O(|\phi|^4), \quad |\phi|^2 \equiv \phi \bar{\phi}. \quad (31)$$

Задача зводиться до того, щоб виразити параметр нелінійності C через структурні константи v_{mn} , які визначаються рівностями (23).

Диференціювання складеної функції $z(t) = \phi(t) + \chi(\phi(t), \bar{\phi}(t))$ дає

$$\dot{z} = \dot{\phi} + \chi_\phi \dot{\phi} + \chi_{\bar{\phi}} \dot{\bar{\phi}}; \quad \chi_\phi \equiv \frac{\partial \chi}{\partial \phi}, \quad \chi_{\bar{\phi}} \equiv \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\phi}}. \quad (32)$$

Віднімаючи (31) із (19), приходимо до рівняння

$$\chi_\phi \dot{\phi} + \chi_{\bar{\phi}} \dot{\bar{\phi}} =$$

$$= \Lambda \chi(\phi, \bar{\phi}) + [v(z, \bar{z}) - C |\phi|^2 \phi] + O(|\phi|^5), \quad (33)$$

ліва частина якого впливає з (32), а у правій враховано першу рівність (30). Виразивши похідні за часом із (31), з точністю до кубічних доданків знаходимо рівняння

$$\phi \Lambda \chi_\phi + \bar{\Lambda} \bar{\phi} \chi_{\bar{\phi}} - \Lambda \chi =$$

$$= \sum_{2 \leq m+n \leq 3} \frac{v_{mn}}{m!n!} (\phi + \chi)^m (\bar{\phi} + \bar{\chi})^n -$$

$$- (C \phi + C \chi_\phi \phi + \bar{C} \chi_{\bar{\phi}} \bar{\phi}) |\phi|^2, \quad (34)$$

в якому враховано розклад (22). Згідно з останнім виразом (30), ліва частина цього рівняння має вигляд

$$\phi \Lambda \chi_\phi + \bar{\Lambda} \bar{\phi} \chi_{\bar{\phi}} - \Lambda \chi =$$

$$= \sum_{2 \leq m+n \leq 4} \frac{\chi_{mn} (m\Lambda + n\bar{\Lambda} - \Lambda)}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n. \quad (35)$$

Для визначення коефіцієнтів χ_{mn} з $m+n=2$ розглянемо рівняння (34), утримуючи члени другого порядку за $\phi, \bar{\phi}$. Згідно з (35) при цьому ліва частина записується у вигляді

$$\sum_{m+n=2} \frac{\chi_{mn} (m\Lambda + n\bar{\Lambda} - \Lambda)}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n =$$

$$= \frac{\chi_{20}}{2} \Lambda \phi^2 + \chi_{11} \bar{\Lambda} \phi \bar{\phi} + \frac{\chi_{02}}{2} (2\bar{\Lambda} - \Lambda) \bar{\phi}^2. \quad (36)$$

Порівнюючи її множники при ϕ^2 , $\phi\bar{\phi}$ і $\bar{\phi}^2$ з відповідними коефіцієнтами у виразі

$$\frac{v_{20}}{2} \phi^2 + v_{11} \phi \bar{\phi} + \frac{v_{02}}{2} \bar{\phi}^2, \quad (37)$$

до якого зводиться ліва частина (34), знаходимо

$$\chi_{20} = \frac{v_{20}}{\Lambda}, \quad \chi_{11} = \frac{v_{11}}{\Lambda}, \quad \chi_{02} = \frac{v_{02}}{2\bar{\Lambda} - \Lambda}. \quad (38)$$

Далі слід виділити в (34) доданки, що містять $|\phi|^2\phi$. При цьому в суму (35) дає внесок тільки член, що відповідає $m = 2$, $n = 1$, і ліва частина рівняння (34) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \chi_{21} \frac{2\Lambda + \bar{\Lambda} - \Lambda}{2!1!} \phi^2 \bar{\phi} = \\ = \frac{\chi_{21}}{2} (\Lambda + \bar{\Lambda}) |\phi|^2 \phi = \chi_{21} \Re \Lambda |\phi|^2 \phi. \end{aligned} \quad (39)$$

Відповідно сума у правій частині містить доданки

$$\begin{aligned} \frac{v_{20}}{2} (\phi + \chi)^2 + v_{11} (\phi + \chi) (\bar{\phi} + \bar{\chi}) + \\ + \frac{v_{02}}{2} (\bar{\phi} + \bar{\chi})^2 + \frac{v_{21}}{2} (\phi + \chi)^2 (\bar{\phi} + \bar{\chi}), \end{aligned} \quad (40)$$

що приводять до множника, який стоїть перед $|\phi|^2\phi$,

$$\begin{aligned} v_{20} \chi_{11} + v_{11} (\chi_{20} + \bar{\chi}_{11}) + v_{02} \bar{\chi}_{02} + \frac{v_{21}}{2} = \\ 2v_{11} v_{20} \frac{\Re \Lambda}{|\Lambda|^2} + \frac{|v_{11}|^2}{\Lambda} + \frac{|v_{02}|^2}{2\bar{\Lambda} - \Lambda} + \frac{v_{21}}{2}, \end{aligned} \quad (41)$$

де останнє рівняння враховує вигляд коефіцієнтів (38). Оскільки члени рівняння (34), що містять $\chi_\phi |\phi|^2\phi$ і $\chi_{\bar{\phi}} |\phi|^2\bar{\phi}$, дають внесок вищого порядку, ніж $|\phi|^2\phi$, то їх можна опустити, і рівності (38), (39) і (41) виражають параметр нелінійності рівняння (31) у вигляді

$$C = 2v_{11} v_{20} \frac{\Re \Lambda}{|\Lambda|^2} + \frac{|v_{11}|^2}{\Lambda} + \frac{|v_{02}|^2}{2\bar{\Lambda} - \Lambda} + \frac{v_{21}}{2} - \chi_{21} \Re \Lambda. \quad (42)$$

4. Умови утворення граничного циклу

Знайдений вираз (42) є неповним, оскільки містить невідомий коефіцієнт χ_{21} , визначення якого потребує врахування не тільки членів, пропорційних $|\phi|^2\phi$, але і кубічних доданків ϕ^3 , $|\phi|^2\bar{\phi}$, $\bar{\phi}^3$ [5]. Слід однак врахувати, що параметр нелінійності міститься тільки у доданку вищого порядку ряду (31), де покладається рівним нулю дійсне значення показника Ляпунова $\Lambda \equiv \lambda + i\omega$. Тоді із (42) випливає вираз для показника Флоке $\Phi \equiv C|_{\lambda=0}$:

$$\Phi = \frac{1}{2} v_{21} - \frac{i}{\omega_0} \left(|v_{11}|^2 + \frac{1}{3} |v_{02}|^2 \right), \quad (43)$$

де введено характерну частоту $\omega_0 \equiv \omega|_{\lambda=0}$. Стаціонарна точка, що народжує граничний цикл, стає нестійкою за умови $\Re \Phi < 0$. В результаті умова утворення граничного циклу $\Re v_{21} < 0$ набуває вигляду

$$\left(F_{111}^{(1)} + F_{122}^{(1)} \right) + \left(F_{222}^{(2)} + F_{112}^{(2)} \right) < 0, \quad (44)$$

де враховано рівність (28).

Вкажемо, що у монографії [5] замість (43) отримано зовсім інший вираз

$$\Phi = \frac{1}{2} v_{21} - \frac{i}{\omega_0} \left(|v_{11}|^2 + \frac{1}{6} |v_{02}|^2 - \frac{1}{2} v_{20} v_{11} \right). \quad (45)$$

Однак при цьому в означеннях (26)–(28) структурних констант $v_{\alpha\beta}$ замість (20) використовували рівняння $\dot{\mathbf{y}} = \vec{\mathcal{F}}(\mathbf{y})$, в якому відхилення від стаціонарного стану \mathbf{X}_0 визначалось рівністю (11), комбінованою з послідовним поворотом:

$$\mathbf{y} \equiv \mathcal{P} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{X} - \mathbf{X}_0. \quad (46)$$

Відповідна матриця

$$\hat{\mathcal{P}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Lambda_{11}}{\omega_0} & -\frac{\Lambda_{12}}{\omega_0} \end{pmatrix} \quad (47)$$

приводить комплексну силу (21) до вигляду

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{P} F. \quad (48)$$

У результаті знайдений в роботі [5] критерій утворення граничного циклу виражається доволі громіздкою нерівністю

$$\begin{aligned} 2\omega_0 \left[\left(\mathcal{F}_{111}^{(1)} + \mathcal{F}_{122}^{(1)} \right) + \left(\mathcal{F}_{222}^{(2)} + \mathcal{F}_{112}^{(2)} \right) \right] < \\ < \left(\mathcal{F}_{11}^{(1)} + \mathcal{F}_{22}^{(1)} \right) \left(\mathcal{F}_{11}^{(2)} - \mathcal{F}_{22}^{(2)} - 2\mathcal{F}_{12}^{(1)} \right) + \end{aligned}$$

$$+ (\mathcal{F}_{11}^{(2)} + \mathcal{F}_{22}^{(2)}) (\mathcal{F}_{11}^{(1)} - \mathcal{F}_{22}^{(1)} + 2\mathcal{F}_{12}^{(2)}). \quad (49)$$

Тут на відміну від (44) нижні індекси вказують диференціювання за компонентами перетвореної координати y , а не початкової x .

5. Самоорганізована модуляція системи Лоренца

Для підтвердження правомірності критерія (44) дослідимо систему Лоренца, поведінка якої задається рівняннями еволюції напруги поля випромінювання E , поляризації середовища P і різниці заселеності рівнів S [1]. В цьому випадку режим самоорганізованої модуляції можливий тільки за умови, що рівняння для напруги набуває нелінійний внесок, зумовлений дисперсією її часу релаксації [6, 8]. В результаті поведінка системи описується рівняннями

$$\tau_E \dot{E} = -E + a_E P - \varphi(E), \quad \varphi(E) \equiv \frac{\kappa E}{1 + E^2/E_\tau^2};$$

$$\tau_P \dot{P} = -P + a_P E S;$$

$$\tau_S \dot{S} = (S_e - S) - a_S E P. \quad (50)$$

Тут τ_E , τ_P , τ_S – масштаби зміни величин, вказаних індексами, a_E , a_P , a_S – додатні константи зв'язку, $\kappa > 0$ – параметр нелінійності, E_τ – характерне значення напруги, S_e – параметр накачки. Будемо вимірювати величини t , E , P , S у масштабах τ_E , $E_s = (a_P a_S)^{-1/2}$, $P_s = (a_E^2 a_P a_S)^{-1/2}$, $S_s = (a_E a_P)^{-1}$. Тоді рівняння (50) набувають вигляду

$$\dot{E} = -E + P - \varphi(E), \quad \varphi(E) \equiv \frac{\kappa E}{1 + E^2/E_\tau^2};$$

$$\sigma \dot{P} = -P + E S,$$

$$\varepsilon \dot{S} = (S_e - S) - E P, \quad (51)$$

де введено співвідношення характерних часів $\sigma \equiv \tau_P/\tau_E$, $\varepsilon \equiv \tau_S/\tau_E$.

За виконання адіабатичної умови $\tau_P \ll \tau_E$ ліву частину другого рівняння (51) можна покласти рівною нулю, в результаті чого поляризація виражається рівністю $P = E S$. Підставляючи її у рівняння, які лишилися (51), отримуємо систему

$$\dot{E} = -E(1 - S) - \varphi(E),$$

$$\dot{S} = \varepsilon^{-1} [S_e - S(1 + E^2)]. \quad (52)$$

Стационарні стани відповідають неупорядкованому стану $(0, S_e)$ і впорядкованому (E_0, S_0) , де

$$E_0 = E_{00} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{E_\tau^2}{E_{00}^4} (S_e - S_c)} \right]^{1/2},$$

$$S_0 = \frac{(1 + E_{00}^2) - \sqrt{(1 + E_{00}^2)^2 - (1 - E_\tau^2) S_e}}{1 - E_\tau^2};$$

$$E_{00}^2 \equiv \frac{1}{2} [(S_e - 1) - (1 + \kappa) E_\tau^2], \quad S_c \equiv 1 + \kappa. \quad (53)$$

При зовнішньому впливі, обмеженому інтервалом (S_c^0, S_c) з нижньою межею

$$S_c^0 = 1 + E_\tau^2(\kappa - 1) + 2E_\tau \sqrt{\kappa(1 - E_\tau^2)}, \quad (54)$$

ефективний потенціал має бар'єр, який приводить до переривного перетворення, а в разі закритичної накачки $S_e > S_c$ фазовий перехід стає неперервним. Така картина реалізується, якщо параметр нелінійності перевищує значення $\kappa_{min} = E_\tau^2/(1 - E_\tau^2)$.

Як показує подальший розгляд, поведінка системи визначається похідними функції $\varphi(E)$ у першому із рівнянь (51):

$$\varphi'(E) = \kappa \frac{1 - E^2/E_\tau^2}{(1 + E^2/E_\tau^2)^2},$$

$$\varphi''(E) = -\frac{2\kappa (E/E_\tau)(3 - E^2/E_\tau^2)}{E_\tau (1 + E^2/E_\tau^2)^3},$$

$$\varphi'''(E) = -\frac{6\kappa (1 - 6(E/E_\tau)^2 + (E/E_\tau)^4)}{E_\tau^2 (1 + E^2/E_\tau^2)^4}. \quad (55)$$

При цьому елементи матриці Якобі виражаються у вигляді

$$\Lambda_{11} = S - \Lambda_c, \quad \Lambda_c \equiv 1 + \varphi'(E); \quad \Lambda_{12} = E;$$

$$\Lambda_{21} = -2\varepsilon^{-1} S E; \quad \Lambda_{22} = -\varepsilon^{-1} (1 + E^2), \quad (56)$$

де роль змінних X_1 , X_2 відіграють величини E , S , яким слід надати значення 0 , S_e у неупорядкованому стані і (53) у впорядкованому. У першому з них

$$\Lambda_{11} = S_e - S_c, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = 0, \quad \Lambda_{22} = -\varepsilon^{-1}. \quad (57)$$

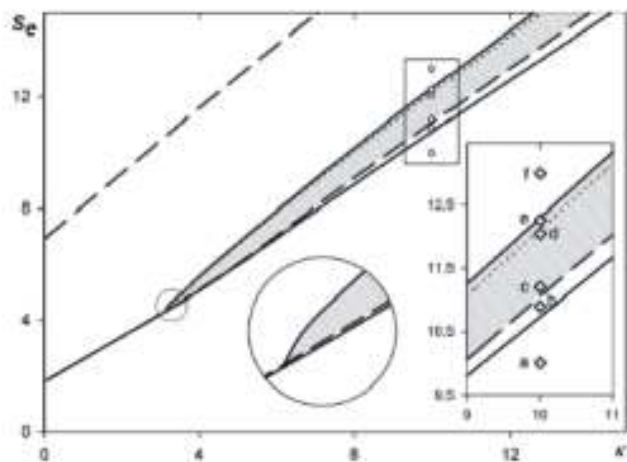


Рис. 1. Фазова діаграма, що визначає діапазон стійкого граничного циклу (заштрихована). Нижня неперервна лінія задана умовою $\Phi = 0$, верхня – рівнянням $C(\lambda > 0) = 0$; штрихові лінії визначаються умовою $\Im\omega = 0$, пунктирна – рівнянням $\lambda = 0$

Рівняння на власні значення (7) дає інкремент

$$\lambda = \frac{1}{2} [(S - \Lambda_c) - \varepsilon^{-1} (1 + E^2)] \quad (58)$$

і характерну частоту

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{8\varepsilon^{-1} E^2 S - [(S - \Lambda_c) + \varepsilon^{-1} (1 + E^2)]^2}. \quad (59)$$

Стационарний стан втрачає стійкість за умови

$$\varepsilon(S - \Lambda_c) > 1 + E^2, \quad (60)$$

а коливальна поведінка з'являється за

$$8\varepsilon E^2 S > [\varepsilon(S - \Lambda_c) + (1 + E^2)]^2. \quad (61)$$

Для неупорядкованого стану $(0, S_e)$ перша із цих умов набуває вигляду

$$S_e > S_c + \varepsilon^{-1}, \quad (62)$$

а друга ніколи не виконується. Це означає, що граничний цикл не може народжуватись із неупорядкованого стану, і далі ми розглянемо тільки впорядкований.

Для перевірки критерія народження циклу (44) випишемо ненульові похідні узагальнених сил, що входять до нього:

$$F_{11}^{(1)} = -\varphi''(E_0), \quad F_{12}^{(1)} = 1;$$

$$F_{11}^{(2)} = -2\varepsilon^{-1} S_0, \quad F_{12}^{(2)} = -2\varepsilon^{-1} E_0;$$

$$F_{111}^{(1)} = -\varphi'''(E_0); \quad F_{112}^{(2)} = -2\varepsilon^{-1}. \quad (63)$$

Тоді з урахуванням (55) нерівність (44) набуває вигляду

$$3 \frac{\varepsilon \kappa}{E_\tau^2} \frac{1 - 6(E_0/E_\tau)^2 + (E_0/E_\tau)^4}{(1 + E_0^2/E_\tau^2)^4} < 1. \quad (64)$$

Значення параметрів S_e, κ , за яких реалізується ця умова, наведено на рис. 1. Із нього видно, що граничний цикл утворюється при значній накачці S_e і великих параметрах нелінійності κ (згідно з [6], зростання характерного значення напруги E_τ розширює діапазон самоорганізованої модуляції). Характерно, що значення параметрів S_e, κ і E_τ , за яких реалізується режим самоорганізованої модуляції, не завжди задаються умовою $\Phi = 0$, яка згідно з (64) визначає втрату стійкості впорядкованого стану (на рис. 1 цій умові відповідає нижня неперервна лінія). Для великих κ нижня межа народження граничного циклу (штрихова лінія) визначається умовою $\Im\omega = 0$, що забезпечує коливальну поведінку з частотою. З іншого боку, незважаючи на стійкість впорядкованого стану з інкрементом $\lambda > 0$ вище пунктирної лінії може реалізуватись режим самоорганізованої модуляції, в який впорядкована система переходить за сценарієм фазового переходу першого роду. В цьому випадку верхня межа граничного циклу визначається умовою $C = 0$ при $\lambda > 0$, яка накладається на параметр нелінійності (42), що задається за додатного значення інкремента (58).

Для підтвердження правомірності нерівності (64) було проведено чисельний розв'язок рівнянь (52) при значеннях параметрів, що відповідають точкам *a-f* на рис.1. Вибір цих точок визначається такими умовами ($\kappa, E_\tau = \text{const}$):

a) $\lambda < 0, \quad \Im\omega \neq 0, \quad \Phi > 0;$

b) $\lambda > 0, \quad \Im\omega \neq 0, \quad \Phi < 0;$

c) $\lambda > 0, \quad \Im\omega = 0, \quad \Phi < 0;$

d) $\lambda > 0, \quad \Im\omega = 0, \quad \Phi < 0;$

e) $\lambda < 0, \quad \Im\omega = 0, \quad C < 0;$

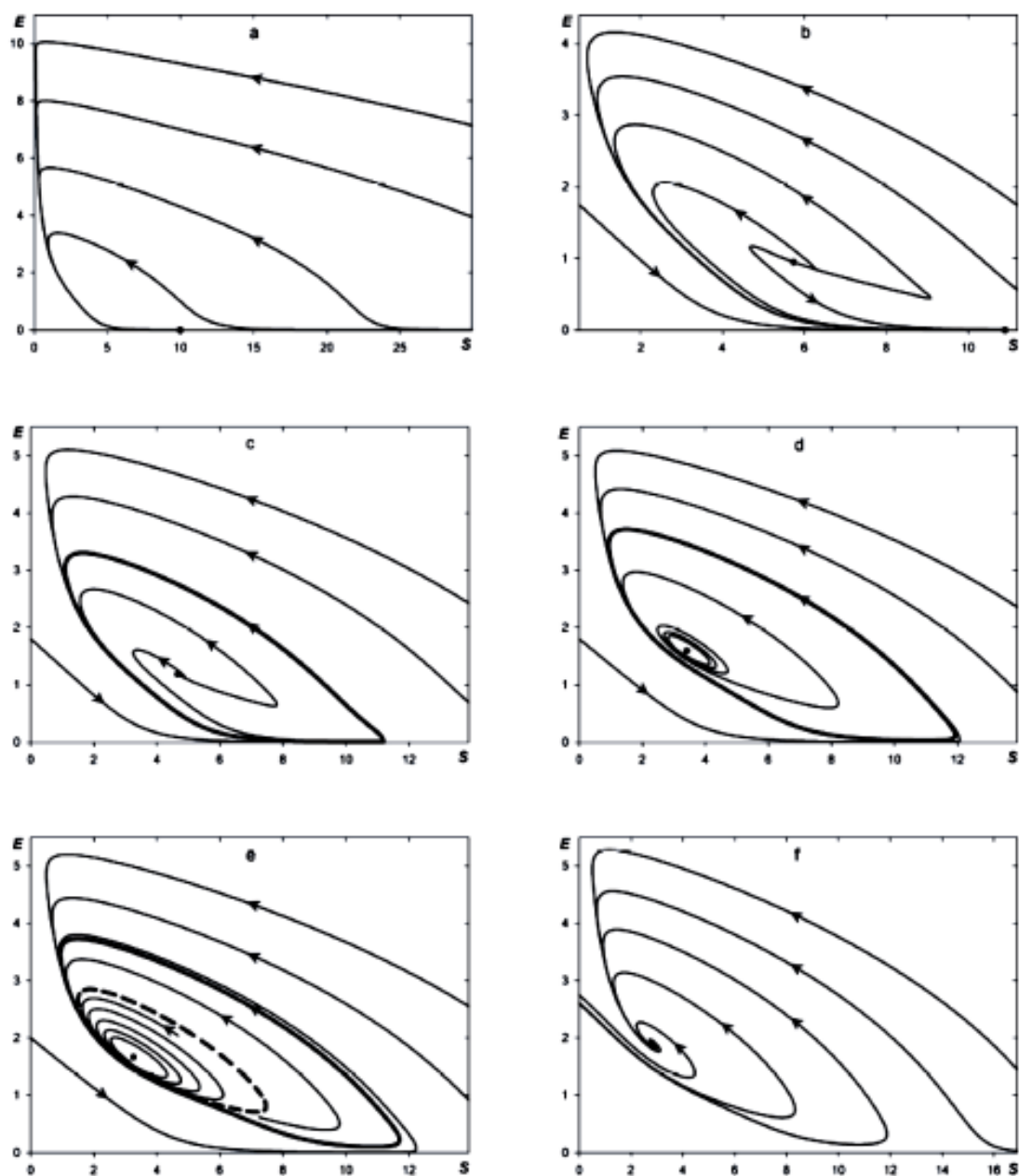


Рис. 2. Вигляд фазових портретів, що відповідають точкам *a-f* на рис. 1 (товста неперервна лінія відповідає стійкому граничному циклу, штрихова – нестійкому)

f) $\lambda < 0$, $\Im\omega = 0$, $C > 0$.

Згідно з рис.2, граничний цикл утворюється у точках *c*, *d*, *e*, і відсутній у станах *a*, *b*, *f*. Відповідно до рис. 1 це повністю підтверджує критерії (44), (60) і (61) стосовно системи Лоренца (51).

Розглянемо тепер умову (49), знайдену в роботі [5]. Згідно з (46)–(48) її форма визначається транс-

формованими координатами

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \frac{1}{\omega_0} (\Lambda_{11}x_1 - \Lambda_{12}x_2) \quad (65)$$

і силами

$$\mathcal{F}^{(1)} = F^{(1)}, \quad \mathcal{F}^{(2)} = \frac{1}{\omega_0} (\Lambda_{11}F^{(1)} - \Lambda_{12}F^{(2)}). \quad (66)$$

Такий зв'язок початкових координат x_1, x_2 і сил $F^{(1)}, F^{(2)}$ з кінцевими y_1, y_2 ; $\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{F}^{(2)}$ приводить до черезмірно громіздких виразів для похідних узагальнених сил: наприклад, вираз $\mathcal{F}_{222}^{(2)}$ містить більше десяти доданків, кожен з яких не простіше дробів (55). Будучи підставленими у нерівність (49) ці похідні дають настільки громіздкі вирази, що ними практично неможливо скористатися навіть при чисельному дослідженні умов утворення граничного циклу. Зрозуміло, що під час переходу до складніших об'єктів, ніж система Лоренца, ситуація стає ще гіршою, і видається більш прийнятним використовувати компактний критерій (44).

1. Г. Хакен, Синергетика (Мир, Москва, 1980).
2. Дж. Николіс, Динамика иерархических систем: эволюционное представление (Мир, Москва, 1989).
3. А.С. Михайлов, А.Уч., Loskutov, Foundations in synergetics II (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1996).
4. В.Й. Сугаков, Основи синергетики (Обереги, Київ, 2001).
5. Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн, Теория и приложения бифуркации рождения цикла (Мир, Москва, 1985).
6. А.И. Олемской, Д.О. Харченко, В.О. Харченко, Вісник СумДУ, №1 (2007) 75.
7. А.И. Олемской, Д.О. Харченко, Самоорганизация самоподобных сложных систем (Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2007).
8. О.І. Олемской, І.О. Шуда, В.О. Харченко, УФЖ 51 (2006) 312.

Одержано 26.03.08

УСЛОВИЯ САМООРГАНИЗОВАННОЙ МОДУЛЯЦИИ

А.И. Олемской, И.А. Шуда, С.С. Борисов

Резюме

Исследованы условия рождения граничного цикла, которые обеспечивают переход неравновесной системы в режим самоорганизованной модуляции. Приведена схема, использование которой позволяет представить уравнение самосогласованной эволюции пары действительных переменных одним уравнением движения комплексного параметра порядка. Найден оптимальный базис, в котором его эволюция описывается уравнением Гинзбурга–Ландау, имеющим только комплексную нелинейность. Определены условия перехода в режим самоорганизованной модуляции.

CONDITIONS FOR SELF-ORGANIZED MODULATION

O.I. Olemskoi, I.O. Shuda¹, S.S. Borisov¹

Institute of Applied Physics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(58, Petropavlivska Str., Sumy 40030, Ukraine;
e-mail: alex@ufn.ru),

¹Sumy State University
(2, Rymtskyi-Korsakov Str., Sumy 40007, Ukraine)

Summary

Conditions for the creation of a limit cycle, which provide the transition of a nonequilibrium system into a self-organized modulation mode, have been studied. An approach, which allows one to replace the equations of self-consistent evolution for a pair of real-valued variables by a single equation of motion for a complex-valued order parameter, is proposed. The optimum basis has been found, in which the evolution of the complex-valued order parameter is described by the Ginzburg–Landau equation characterized by a complex-valued non-linearity only. Conditions for the system to transit into the self-organized modulation mode are determined.